

# À vous de jouer !

Chloé Capon   Aline Goeminne   Nicolas Lecomte  
James Main   Mickaël Randour   Gaëtan Staquet  
Alexandre Terefenko   Pierre Vandenhove

UMONS – Université de Mons, Faculté des Sciences

Mars 2023

*Journées Math-Sciences*



# Nous allons jouer...

**But de l'exposé** : vous faire découvrir la *théorie des jeux*.

Comment ?

- ▶ Besoin de vous pour participer à quelques petits jeux...
- ▶ Aperçu de quelques concepts clés.

**N'hésitez pas à participer et intervenir !**

## Contexte : théorie des jeux

- Approche mathématique très générale.
- Interactions entre entités ou systèmes vues comme des jeux entre plusieurs joueurs.
- Nombreuses applications : informatique, économie, biologie, politique. . .

# Des joueurs rationnels

**Hypothèse fondamentale** : les joueurs sont rationnels.

- ▷ Ils basent leurs décisions sur *les données disponibles*.
- ▷ Ils souhaitent maximiser leur *profit personnel*.
- ▷ Ils n'ont *pas de sentiment*, leurs choix ne sont pas influencés par l'amitié, la responsabilité sociale ou civique.

**Aujourd'hui, soyez égoïstes ! Ce n'est qu'un jeu...**

## Un premier jeu : le jeu de Nim

- Deux joueurs.
- 13 allumettes.
- À tour de rôle, chaque joueur enlève 1, 2 ou 3 allumettes (pas zéro!).
- Celui qui retire la dernière allumette a perdu...

# Un premier jeu : le jeu de Nim

- Deux joueurs.
- 13 allumettes.
- À tour de rôle, chaque joueur enlève 1, 2 ou 3 allumettes (pas zéro!).
- Celui qui retire la dernière allumette a perdu...

**Qui a gagné ? Le perdant aurait-il pu gagner ?**

## Le jeu de Nim : match retour

- 12 allumettes.

**Qui va gagner ? Prenons les paris !**

## Le jeu de Nim : match retour

- 12 allumettes.

**Qui va gagner ? Prenons les paris !**

**Si je parie 100 euros sur ma victoire au jeu de Nim (12 allumettes), décidez-vous de me laisser jouer en premier ? Et à 13 allumettes ?**



## Le jeu de Nim : match retour

- **12** allumettes.

**Qui va gagner ? Prenons les paris !**

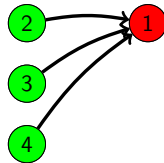
**Si je parie 100 euros sur ma victoire au jeu de Nim (12 allumettes), décidez-vous de me laisser jouer en premier ? Et à 13 allumettes ?**

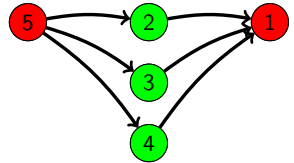
- Avec **4** allumettes ou **5** allumettes,

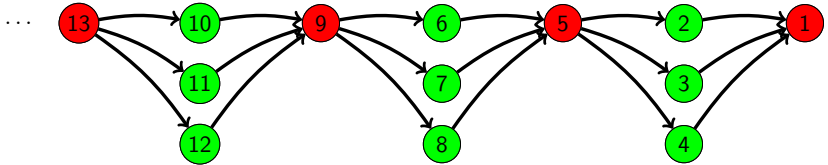
**Comment être sûr de gagner ?**

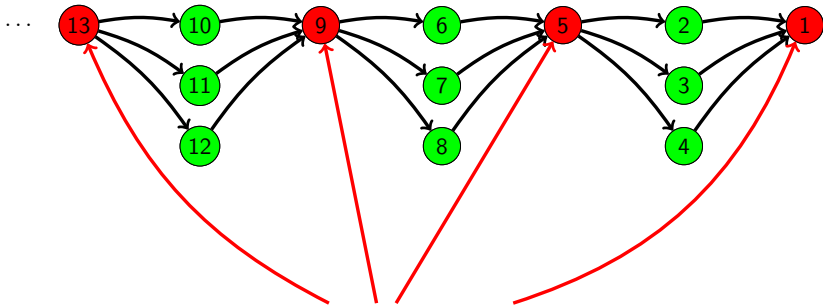
1











Positions perdantes.

Stratégie gagnante dans les autres positions.

## Jeux déterminés

- En théorie des jeux, on dit que le jeu de Nim est **déterminé** : étant donné la situation de départ, un des joueurs peut gagner à coup sûr (à condition de jouer une stratégie adéquate!).



## Jeux déterminés

- En théorie des jeux, on dit que le jeu de Nim est **déterminé** : étant donné la situation de départ, un des joueurs peut gagner à coup sûr (à condition de jouer une stratégie adéquate!).
- Pas passionnant comme jeu ! Et pourtant... c'est le cas de nombreux jeux comme *Puissance 4* par exemple.



## Jeux déterminés

- En théorie des jeux, on dit que le jeu de Nim est **déterminé** : étant donné la situation de départ, un des joueurs peut gagner à coup sûr (à condition de jouer une stratégie adéquate!).
- Pas passionnant comme jeu ! Et pourtant... c'est le cas de nombreux jeux comme *Puissance 4* par exemple.
- Même *les échecs* sont concernés par ce type de résultats.



## Jeux déterminés

- En théorie des jeux, on dit que le jeu de Nim est **déterminé** : étant donné la situation de départ, un des joueurs peut gagner à coup sûr (à condition de jouer une stratégie adéquate!).
- Pas passionnant comme jeu ! Et pourtant... c'est le cas de nombreux jeux comme *Puissance 4* par exemple.
- Même *les échecs* sont concernés par ce type de résultats.

### Théorème de Zermelo pour les échecs

Soit le joueur blanc peut gagner à coup sûr, soit le joueur noir peut gagner à coup sûr, soit les deux peuvent assurer un match nul.

- ▶ Mais l'existence d'une stratégie n'implique pas qu'elle soit facile à calculer ! On ne la connaît toujours pas...

## Autre modèle de jeu

- Ici, les joueurs choisissent leur action simultanément, **sans se concerter**.
- Chacun gagne (ou perd) un certain montant, nous ne sommes plus dans un modèle où l'un gagne la partie et l'autre la perd (comme le jeu de Nim)  $\rightsquigarrow$  chaque joueur cherche à maximiser son gain (minimiser sa perte).

## Dilemme des pièces

- Deux joueurs (A et B) peuvent placer une pièce dans une machine (en secret).
- Si A place une pièce, B en reçoit trois, et inversement.
- La communication est impossible.

| A / B         | <i>Donner</i> | <i>Garder</i> |
|---------------|---------------|---------------|
| <i>Donner</i> | (3, 3)        | (0, 4)        |
| <i>Garder</i> | (4, 0)        | (1, 1)        |

**Jouons (choix secret).**

## Dilemme des pièces : analyse

**Les joueurs ont-ils agi de manière rationnelle ?  
Pouvaient-ils faire mieux ?**

## Dilemme des pièces : analyse

**Les joueurs ont-ils agi de manière rationnelle ?**

**Pouvaient-ils faire mieux ?**

**En se parlant ? Essayons !**

## Dilemme des pièces : analyse

**Les joueurs ont-ils agi de manière rationnelle ?**

**Pouvaient-ils faire mieux ?**

**En se parlant ? Essayons !**

- ▷ Notion de *stratégie dominante*  $\rightsquigarrow$  quoi que fasse l'adversaire, il vaut mieux garder sa pièce !

| A / B  | Donner | Garder |
|--------|--------|--------|
| Donner | (3, 3) | (0, 4) |
| Garder | (4, 0) | (1, 1) |



## Dilemme des pièces : analyse

**Une coopération est-elle possible ?**

## Dilemme des pièces : analyse

### Une coopération est-elle possible ?

- ▶ Le modèle classique de la théorie des jeux suppose que les individus sont égoïstes, et donc qu'il n'est pas possible de leur faire confiance.
- ▶ Pour certaines applications (p.ex. informatique), c'est la réalité. Pour d'autres (p.ex. économie, politique), c'est un vaste débat. . .

## Dilemme des pièces répété

- ▶ Supposons maintenant que l'on joue le dilemme des pièces sans jamais s'arrêter.

**Quelle stratégie adopteriez-vous ?**

## Dilemme des pièces répété

- ▶ Supposons maintenant que l'on joue le dilemme des pièces sans jamais s'arrêter.

### Quelle stratégie adopteriez-vous ?

- ▶ Il est donc possible de pousser à la coopération en répétant le dilemme et en donnant la possibilité de punir l'autre joueur s'il a gardé sa pièce au coup précédent.

## Dilemme des pièces répété

- ▶ Supposons maintenant que l'on joue le dilemme des pièces sans jamais s'arrêter.

### Quelle stratégie adopteriez-vous ?

- ▶ Il est donc possible de pousser à la coopération en répétant le dilemme et en donnant la possibilité de punir l'autre joueur s'il a gardé sa pièce au coup précédent.
- ▶ Notion d'*équilibre de Nash* : aucun des deux joueurs n'a d'intérêt à changer de stratégie.

# Monty Hall

Nouveau jeu.

- Trois boîtes, deux sont vides, la troisième contient une pièce.
- Le joueur choisit une boîte. Le présentateur ouvre une boîte vide (non choisie) et propose au joueur de changer de boîte.

**Jouons !**

# Monty Hall : analyse

**Le joueur a-t-il intérêt à changer de boîte ?**

# Monty Hall : analyse

## Le joueur a-t-il intérêt à changer de boîte ?

Supposons que le joueur choisisse la 1ère boîte : trois cas sont possibles.





# Monty Hall : analyse

## Le joueur a-t-il intérêt à changer de boîte ?

Supposons que le joueur choisisse la 1ère boîte : trois cas sont possibles.



# Monty Hall : analyse

## Le joueur a-t-il intérêt à changer de boîte ?

Supposons que le joueur choisisse la 1ère boîte : trois cas sont possibles.



**Dans deux cas sur trois, il vaut mieux changer de boîte !**

## Partage de butin



- Cinq pirates, A (le plus vieux), B, C, D et E (le plus jeune), partagent 100 pièces d'or.
- Le plus vieux (A) propose une répartition. Les cinq pirates votent.
- Si la majorité accepte (ou s'il y a égalité), le butin est réparti.
- Sinon, une mutinerie éclate et le plus vieux pirate est jeté à la mer. On recommence avec le nouvel aîné.

**Jouons.**

## Partage de butin : analyse

**Que pensez-vous de l'issue du jeu ? Votez sur ce que A aurait pu obtenir si tout le monde jouait rationnellement.**

## Partage de butin : analyse

**Que pensez-vous de l'issue du jeu ? Votez sur ce que A aurait pu obtenir si tout le monde jouait rationnellement.**

- ▶ Intuitivement, on pourrait penser que A doit être généreux envers les autres pirates, ou préparer son maillot. . .

## Partage de butin : analyse

- ▷ Réfléchissons.
  - Si seuls D et E restent, D prendra les 100 pièces d'or.



## Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si seuls D et E restent, D prendra les 100 pièces d'or.



## Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si seuls D et E restent, D prendra les 100 pièces d'or.





## Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si C, D et E restent, E se contente d'une seule pièce.



## Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si C, D et E restent, E se contente d'une seule pièce.



## Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si C, D et E restent, E se contente d'une seule pièce.



## Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si B, C, D et E restent, c'est D qui se contente d'une pièce.



## Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si B, C, D et E restent, c'est D qui se contente d'une pièce.



## Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si B, C, D et E restent, c'est D qui se contente d'une pièce.



## Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si tous sont encore là, C et E acceptent une unique pièce.



## Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si tous sont encore là, C et E acceptent une unique pièce.





## Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si tous sont encore là, C et E acceptent une unique pièce.



## Partage de butin : analyse

▷ Réfléchissons.

- Si tous sont encore là, C et E acceptent une unique pièce.



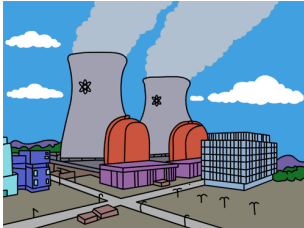
- ▷ Au final, nous avons A : 98, B : 0, C : 1, D : 0, E : 1.  
▷ Étonnant ! Mais la seule issue rationnelle !

# Extensions

- De nombreuses extensions existent, permettant de modéliser des situations plus complexes :
  - ▷ jeux à information imparfaite,
  - ▷ jeux à coalitions,
  - ▷ jeux répétés,
  - ▷ jeux sur graphes,
  - ▷ jeux probabilistes. . .
- La théorie est vraiment très riche. De nouveaux résultats apparaissent régulièrement.
- L'adéquation et la fidélité des modèles par rapport aux situations réelles dépendent des champs d'applications.

# Informatique : fiabilité de systèmes critiques

- Certains systèmes ne tolèrent pas les bugs !



- ▷ Il faut s'assurer de leur *fiabilité* : ils doivent fonctionner quelles que soient les actions entreprises par leur *environnement* (p.ex. foudre).

## Assurer la fiabilité via des jeux

- Modéliser les interactions entre le système et son environnement dans un jeu.
- Le système est un joueur ayant pour but de fonctionner correctement.
- L'environnement est un joueur adversaire ayant pour but de l'en empêcher.

## Assurer la fiabilité via des jeux

- Modéliser les interactions entre le système et son environnement dans un jeu.
- Le système est un joueur ayant pour but de fonctionner correctement.
- L'environnement est un joueur adversaire ayant pour but de l'en empêcher.
- ▷ Si on trouve une stratégie qui gagne à tous les coups pour le système (cf. [jeu de Nim](#)), alors on sait comment contrôler le système pour qu'il soit toujours fiable, quoi qu'il arrive.
- ▷ La théorie des jeux fournit un cadre mathématique pour prouver formellement qu'un système est correct, et pour construire des systèmes corrects de manière automatisée.

## Biologie : évolution

- Expliquer l'évolution des espèces via la théorie de jeux.
- P.ex. travaux de John Maynard Smith.
- Prend en compte la répartition des comportements (stratégies) dans une population pour expliquer son évolution.
- Permet p.ex. d'expliquer l'altruisme.

## Biologie : évolution

- Expliquer l'évolution des espèces via la théorie de jeux.
- P.ex. travaux de John Maynard Smith.
- Prend en compte la répartition des comportements (stratégies) dans une population pour expliquer son évolution.
- Permet p.ex. d'expliquer l'altruisme.

### Qui sont les adversaires ? (Dawkins)

Deux brontosaures essaient d'échapper à un tyrannosaure.

L'un dit : "Pourquoi nous fatiguons-nous ? Nous n'arriverons jamais à courir plus vite que le T-Rex !"

L'autre répond : "Je n'essaie pas de courir plus vite que le T-Rex, juste plus vite que toi !"

- ▷ La compétition est majoritairement intra-espèce !



## Relations internationales, guerre froide et arsenal nucléaire

- La théorie des jeux sert aussi à analyser et prédire l'issue de tensions ou conflits entre nations.
- Elle est d'ailleurs parfois utilisée par les états pour établir leur doctrine stratégique.

## Relations internationales, guerre froide et arsenal nucléaire

- La théorie des jeux sert aussi à analyser et prédire l'issue de tensions ou conflits entre nations.
- Elle est d'ailleurs parfois utilisée par les états pour établir leur doctrine stratégique.
- Certains vont très loin : ainsi, la possibilité de conflits nucléaires est étudiée en utilisant la théorie des jeux.
  - ▷ Certaines interprétations prétendent que la dissuasion nucléaire est le meilleur moyen... de garantir la paix ! En effet, le "coût" d'une utilisation serait tellement énorme que personne n'a intérêt à le risquer  $\rightsquigarrow$  situation d'équilibre pacifique.

# Relations internationales, guerre froide et arsenal nucléaire

- La théorie des jeux sert aussi à analyser et prédire l'issue de tensions ou conflits entre nations.
- Elle est d'ailleurs parfois utilisée par les états pour établir leur doctrine stratégique.
- Certains vont très loin : ainsi, la possibilité de conflits nucléaires est étudiée en utilisant la théorie des jeux.
  - ▷ Certaines interprétations prétendent que la dissuasion nucléaire est le meilleur moyen... de garantir la paix ! En effet, le "coût" d'une utilisation serait tellement énorme que personne n'a intérêt à le risquer  $\rightsquigarrow$  situation d'équilibre pacifique.

**Limites : peut-on être sûr que l'hypothèse de rationalité s'applique toujours ?**

## Économie : favoriser la concurrence

- Domaine de prédilection de la théorie des jeux, les entreprises étant vues comme rationnelles vis-à-vis du profit.
- Permet p.ex. de comprendre les situations de concurrence entre industries menant à des alliances et cartels (organisés ou de fait). Duopole de Cournot.
- Est vérifiée dans des situations réelles où des entreprises s'entendent pour se répartir un marché et bloquer les concurrents émergents, faussant ainsi la concurrence profitable aux consommateurs.

**Merci à tous.**

**N'hésitez pas à discuter !**