

Jouer n'est pas qu'un jeu !

Aaron Bohy

Pierre Carlier

Julie De Pril

Youssef Oualhadj

Mickael Randour

Informatique Théorique et Mathématiques Effectives, Faculté des Sciences,
UMONS

27 et 28 mars 2014

Journées Math-Sciences



Nous allons jouer...

But de l'atelier : vous faire découvrir la *théorie des jeux*.

Comment ?

- ▶ Besoin de vous pour participer à quelques petits jeux. . .
- ▶ Aperçu de quelques concepts clés.

N'hésitez pas à participer et intervenir !

Contexte : théorie des jeux

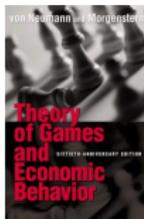
- Approche mathématique très générale.
- Interactions entre entités ou systèmes vues comme des jeux entre plusieurs joueurs.
- Nombreuses applications : informatique, économie, biologie, politique. . . \rightsquigarrow discussion en fin d'atelier.

Contexte : un peu d'histoire

- Bases établies dans *The Theory of Games and Economic Behavior* (1944).



John von Neumann



Oskar Morgenstern

- Au cinéma... la vie de John Nash (4 Oscars!).



Des joueurs rationnels

Hypothèse fondamentale : les joueurs sont rationnels.

- ▷ Ils basent leurs décisions sur *les données disponibles*.
- ▷ Ils souhaitent maximiser leur *profit personnel*.
- ▷ Ils n'ont *pas de sentiment*, leurs choix ne sont pas influencés par l'amitié, la responsabilité sociale ou civique.

Aujourd'hui, soyez égoïstes ! Ce n'est qu'un jeu...

Un premier jeu : le jeu de Nim

- Deux joueurs.
- 13 allumettes.
- A tour de rôle, chaque joueur enlève 1, 2 ou 3 allumettes (pas zéro !).
- Celui qui retire la dernière allumette a perdu. . .

Un premier jeu : le jeu de Nim

- Deux joueurs.
- 13 allumettes.
- A tour de rôle, chaque joueur enlève 1, 2 ou 3 allumettes (pas zéro !).
- Celui qui retire la dernière allumette a perdu...

Qui a gagné ? Le perdant aurait-il pu gagner ?

Le jeu de Nim : match retour

- 12 allumettes.

Qui va gagner ? Prenons les paris !

Le jeu de Nim : match retour

- **12** allumettes.

Qui va gagner ? Prenons les paris !

Si je parie 100 euros sur ma victoire au jeu de Nim (12 allumettes), décidez vous de me laisser jouer en premier ? Et à 13 allumettes ?

Le jeu de Nim : des paris sans enjeu

- ▶ Etant donné un nombre n d'allumettes, soit le premier joueur a une stratégie pour gagner à *tous les coups* ($n \bmod 4 \neq 1$), soit le second joueur en a une ($n \bmod 4 = 1$).
- ▶ Explication ?

Le jeu de Nim : des paris sans enjeu

- ▷ Etant donné un nombre n d'allumettes, soit le premier joueur a une stratégie pour gagner à *tous les coups* ($n \bmod 4 \neq 1$), soit le second joueur en a une ($n \bmod 4 = 1$).
- ▷ Explication ?
 - Si $n = 1$, le premier joueur perd.
 - Si $n = 2, 3$ ou 4 , le premier joueur retire 1, 2 ou 3 allumettes et le deuxième perd.
 - Si $n = 5$, le premier joueur perd.
 - ...

Jeux déterminés

- En théorie des jeux, on dit que le jeu de Nim est **déterminé** : étant donné la situation de départ, un des joueurs peut gagner à coup sûr (à condition de jouer une stratégie adéquate!).
- Pas passionnant comme jeu ! Et pourtant... c'est le cas de nombreux jeux comme *Puissance 4* par exemple.

Jeux déterminés

- En théorie des jeux, on dit que le jeu de Nim est **déterminé** : étant donné la situation de départ, un des joueurs peut gagner à coup sûr (à condition de jouer une stratégie adéquate!).
- Pas passionnant comme jeu ! Et pourtant... c'est le cas de nombreux jeux comme *Puissance 4* par exemple.
- Même *les échecs* sont concernés par ce type de résultats.

Théorème de Zermelo pour les échecs

Soit le joueur blanc peut gagner à coup sûr, soit le joueur noir peut gagner à coup sûr, soit les deux peuvent assurer un match nul.

- ▷ Mais l'existence d'une stratégie n'implique pas qu'elle soit facile à calculer ! On ne la connaît toujours pas...

Autre modèle de jeu

- Ici, les joueurs choisissent leur action simultanément, **sans se concerter**.
- Chacun gagne (ou perd) un certain montant, nous ne sommes plus dans un modèle où l'un gagne la partie et l'autre la perd (comme le jeu de Nim) \rightsquigarrow chaque joueur cherche à maximiser son gain (minimiser sa perte).

Le dilemme du prisonnier

- Deux complices en attente du procès.
- Il leur est proposé de dénoncer l'autre en échange d'une réduction de peine.
- La communication est impossible.

A / B	<i>Se taire</i>	<i>Dénoncer</i>
<i>Se taire</i>	$(-3, -3)$	$(-10, -1)$
<i>Dénoncer</i>	$(-1, -10)$	$(-5, -5)$

Jouons (choix secret).

Le dilemme du prisonnier : analyse

**Les prisonniers ont-ils agi de manière rationnelle ?
Pouvaient-ils faire mieux ?**

Le dilemme du prisonnier : analyse

Les prisonniers ont-ils agi de manière rationnelle ? Pouvaient-ils faire mieux ?

- ▶ Notion de *stratégie dominante* \rightsquigarrow quoique fasse l'adversaire, il vaut mieux dénoncer.

Le dilemme du prisonnier : analyse

Qu'en aurait-il été si une coopération était possible ?

Le dilemme du prisonnier : analyse

Qu'en aurait-il été si une coopération était possible ?

- ▶ Le modèle classique de la théorie des jeux suppose que les individus sont égoïstes, et donc qu'il n'est pas possible de leur faire confiance.
- ▶ Pour certaines applications (p.ex. informatique), c'est la réalité. Pour d'autres (p.ex. économie, politique), c'est un vaste débat. . .

Le dilemme du prisonnier : analyse

Qu'en aurait-il été si une coopération était possible ?

- ▶ Le modèle classique de la théorie des jeux suppose que les individus sont égoïstes, et donc qu'il n'est pas possible de leur faire confiance.
- ▶ Pour certaines applications (p.ex. informatique), c'est la réalité. Pour d'autres (p.ex. économie, politique), c'est un vaste débat. . .
- ▶ Il est possible de pousser à la coopération en répétant le dilemme et en donnant la possibilité de punir l'autre joueur si il a dénoncé au coup précédent.

Bataille des sexes

- Un couple doit décider le programme de la soirée : football ou film romantique.
- Monsieur préfère le foot, Madame le film. Ils préfèrent être ensemble que séparés.

M. / Mme	<i>Foot</i>	<i>Film</i>
<i>Foot</i>	(3, 2)	(1, 1)
<i>Film</i>	(0, 0)	(2, 3)

Jouons (choix secret). N'oubliez pas que vous êtes des joueurs rationnels !

Bataille des sexes : analyse

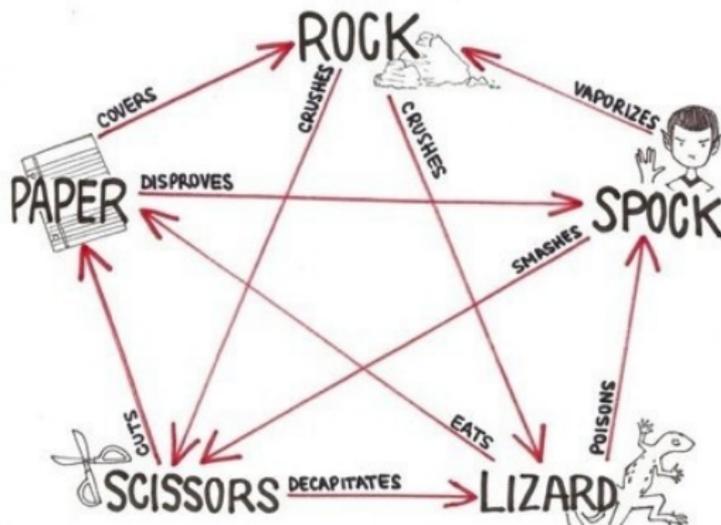
L'issue est-elle rationnelle ? Une autre issue était-elle possible ?

Bataille des sexes : analyse

L'issue est-elle rationnelle ? Une autre issue était-elle possible ?

- ▶ Ici, impossible de trouver de stratégie dominante (meilleure dans tous les cas).
- ▶ Notion d'*équilibre de Nash* \rightsquigarrow a-t-on intérêt à changer de stratégie en supposant que l'adversaire n'en change pas ? (*Foot, Foot*) et (*Film, Film*) sont des situations d'équilibre.
- ▶ Arriver à un équilibre nécessite une coopération des joueurs, mais contrairement au dilemme du prisonnier, *ils savent que l'autre n'a pas intérêt à trahir.*

Pierre / Papier / Ciseaux (/ Lézard / Spock)



▷ Version classique : pierre / papier / ciseaux.

Pierre / Papier / Ciseaux

A / B	<i>Pierre</i>	<i>Papier</i>	<i>Ciseaux</i>
<i>Pierre</i>	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
<i>Papier</i>	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
<i>Ciseaux</i>	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

Ce jeu possède-t-il une situation d'équilibre ?

Pierre / Papier / Ciseaux

A / B	<i>Pierre</i>	<i>Papier</i>	<i>Ciseaux</i>
<i>Pierre</i>	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
<i>Papier</i>	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
<i>Ciseaux</i>	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

Ce jeu possède-t-il une situation d'équilibre ?

**Quelle est une bonne stratégie intuitive dans ce jeu ?
Imaginez qu'on répète le jeu plusieurs fois.**

Pierre / Papier / Ciseaux

- ▶ Intuitivement, on va *choisir aléatoirement*, avec une distribution uniforme (probabilité de $1/3$ sur chaque action).
- ▶ On peut montrer que cela correspond à une situation d'équilibre : si le joueur A joue cette stratégie, le joueur B n'a pas intérêt à en dévier car son gain espéré sera moindre.

Partage de butin

- Cinq pirates, A (le plus vieux), B, C, D et E (le plus jeune), partagent 100 pièces d'or.
- Le plus vieux (A) propose une répartition. Les cinq pirates votent.
- Si la majorité accepte (ou s'il y a égalité), le butin est réparti.
- Sinon, une mutinerie éclate et le plus vieux pirate est jeté à la mer. On recommence avec le nouvel aîné.

Jouons (choix secret).

Partage de butin : analyse

Que pensez-vous de l'issue du jeu ? Votez sur ce que A aurait pu obtenir si tout le monde jouait rationnellement.

Partage de butin : analyse

Que pensez-vous de l'issue du jeu ? Votez sur ce que A aurait pu obtenir si tout le monde jouait rationnellement.

- ▶ Intuitivement, on pourrait penser que A doit être généreux envers les autres pirates, ou préparer son maillot. . .

Partage de butin : analyse

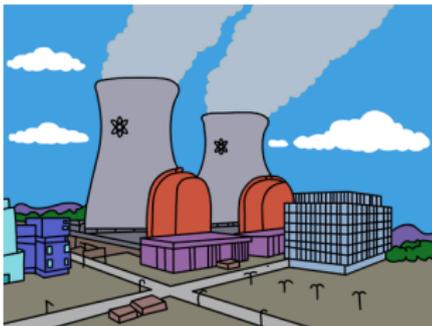
- ▷ Réfléchissons.
 - Si seuls D et E restent, D prendra les 100 pièces d'or.
 - Si C, D et E restent, alors C proposera de prendre 99 pièces et d'en donner une seule à E : c'est mieux que zéro si C est jeté par-dessus bord donc E accepte.
 - Si B, C, D et E restent, alors B propose 99 pièces pour lui et une à D. Celui-ci accepte car c'est mieux que zéro si B est renversé.
 - Si les cinq pirates sont là, alors A peut s'assurer 98 pièces en offrant une pièce à C et une à E, qui n'obtiendront rien si ils refusent.
- ▷ Au final, nous avons A : 98, B : 0, C : 1, D : 0, E : 1.
- ▷ Etonnant ! Mais la seule issue rationnelle !

Extensions

- De nombreuses extensions existent, permettant de modéliser des situations plus complexes :
 - ▷ jeux à information imparfaite,
 - ▷ jeux à coalitions,
 - ▷ jeux répétés,
 - ▷ jeux sur graphes,
 - ▷ jeux probabilistes. . .
- La théorie est vraiment très riche. De nouveaux résultats apparaissent régulièrement.
- L'adéquation et la fidélité des modèles par rapport aux situations réelles dépendent des champs d'applications.

Informatique : fiabilité de systèmes critiques

- Certains systèmes ne tolèrent pas les bugs !



- ▷ Il faut s'assurer de leur *fiabilité* : ils doivent fonctionner quelques soient les actions entreprises par leur *environnement* (p.ex. foudre).

Assurer la fiabilité via des jeux

- Modéliser les interactions entre le système et son environnement dans un jeu.
- Le système est un joueur ayant pour but de fonctionner correctement.
- L'environnement est un joueur adversaire ayant pour but de l'en empêcher.

Assurer la fiabilité via des jeux

- Modéliser les interactions entre le système et son environnement dans un jeu.
 - Le système est un joueur ayant pour but de fonctionner correctement.
 - L'environnement est un joueur adversaire ayant pour but de l'en empêcher.
-
- ▷ Si on trouve une stratégie qui gagne à tous les coups pour le système (cf. [jeu de Nim](#)), alors on sait comment contrôler le système pour qu'il soit toujours fiable, quoiqu'il arrive.
 - ▷ La théorie des jeux fournit un cadre mathématique pour prouver formellement qu'un système est correct, et pour construire des systèmes corrects de manière automatisée.

Biologie : évolution

- Expliquer l'évolution des espèces via la théorie de jeux.
- P.ex. travaux de John Maynard Smith.
- Prend en compte la répartition des comportements (stratégies) dans une population pour expliquer son évolution.
- Permet p.ex. d'expliquer l'altruisme.

Biologie : évolution

- Expliquer l'évolution des espèces via la théorie de jeux.
- P.ex. travaux de John Maynard Smith.
- Prend en compte la répartition des comportements (stratégies) dans une population pour expliquer son évolution.
- Permet p.ex. d'expliquer l'altruisme.

Qui sont les adversaires ? (Dawkins)

Deux brontosaures essaient d'échapper à un tyrannosaure.

L'un dit : "Pourquoi nous fatiguons-nous ? Nous n'arriverons jamais à courir plus vite que le T-Rex !"

L'autre répond : "Je n'essaie pas de courir plus vite que le T-Rex, juste plus vite que toi !"

▶ La compétition est majoritairement intra-espèce !

Relations internationales, guerre froide et arsenal nucléaire

- La théorie des jeux sert aussi à analyser et prédire l'issue de tensions ou conflits entre nations.
- Elle est d'ailleurs parfois utilisée par les états pour établir leur doctrine stratégique.

Relations internationales, guerre froide et arsenal nucléaire

- La théorie des jeux sert aussi à analyser et prédire l'issue de tensions ou conflits entre nations.
- Elle est d'ailleurs parfois utilisée par les états pour établir leur doctrine stratégique.
- Certains vont très loin : ainsi, la possibilité de conflits nucléaires est étudiée en utilisant la théorie des jeux.
 - ▷ Certaines interprétations prétendent que la dissuasion nucléaire est le meilleur moyen... de garantir la paix! En effet, le "coût" d'une utilisation serait tellement énorme que personne n'a intérêt à le risquer \rightsquigarrow situation d'équilibre pacifique.

Relations internationales, guerre froide et arsenal nucléaire

- La théorie des jeux sert aussi à analyser et prédire l'issue de tensions ou conflits entre nations.
- Elle est d'ailleurs parfois utilisée par les états pour établir leur doctrine stratégique.
- Certains vont très loin : ainsi, la possibilité de conflits nucléaires est étudiée en utilisant la théorie des jeux.
 - ▷ Certaines interprétations prétendent que la dissuasion nucléaire est le meilleur moyen... de garantir la paix ! En effet, le "coût" d'une utilisation serait tellement énorme que personne n'a intérêt à le risquer \rightsquigarrow situation d'équilibre pacifique.

Limites : peut-on être sûr que l'hypothèse de rationalité s'applique toujours ?

Economie : favoriser la concurrence

- Domaine de prédilection de la théorie des jeux, les entreprises étant vues comme rationnelles vis-à-vis du profit.
- Permet p.ex. de comprendre les situations de concurrence entre industries menant à des alliances et cartels (organisés ou de fait). Duopole de Cournot.
- Est vérifiée dans des situations réelles où des entreprises s'entendent pour se répartir un marché et bloquer les concurrents émergents, faussant ainsi la concurrence profitable aux consommateurs.

Merci à tous.

N'hésitez pas à discuter !